

Fermions from Only Orientable Diffeomorphism Symmetry

H.B. Nielsen², Niels Bohr Institut, and Astri Kleppe

“Bled” , July , 2025

²Speaker at the Work Shop “What comes beyond the Standard Models” in Bled.

Astri and I claim: We derive locality(weak form) from Diffeomorphism Symmetry

When we impose the action to be diffeomorphism invariant and “analytical as a functional”, the action must be of the form

$$S[\phi] = F\left(\int \mathbf{L}_1(x)d^4x, \int \mathbf{L}_2(x)d^4x, \dots, \int \mathbf{L}_N(x)d^4x\right) \quad (1)$$

where the integrals over space time $\int \mathbf{L}_i(x)d^4x$ are of the usual type for diffeomorphism invariant theory actions, an integral over a (Lagrange) density $\mathbf{L}_i(x)$ (transforming as if with the $\sqrt{g}$ factor). While S is of course a functional of the very generally denoted fields $\phi(x)$, the F on the right hand side is just a **function** of all the possible integrals of the type $\int \mathbf{L}_i(x)d^4x$, which can be formed.

Usual Locality means the Action of the form:

$$S[\phi]_{usual} = \int \sum_i a_i \mathbf{L}_i(x) d^4x \quad (2)$$

with the a_i being constant coefficients.

But we can check that our derived form

$$S[\phi] = F\left(\int \mathbf{L}_1(x) d^4x, \int \mathbf{L}_2(x) d^4x, \dots, \int \mathbf{L}_N(x) d^4x\right) \quad (3)$$

is **almost** good enough in practice.

Most Important Reason, that Our form is Sufficient:

The equation of motion from our form gets

$$0 = \delta S[\phi] \quad (4)$$

$$= \sum_i \frac{\partial F(\int \mathbf{L}_1(x) d^4x, \dots)}{\partial \int \mathbf{L}_i(x) d^4x} * \delta \int \mathbf{L}_i(x) d^4x \quad (5)$$

$$= \delta \int \sum_i a_i \mathbf{L}_i(x) d^4x \quad (6)$$

$$= \delta S[\phi]_{usual} \quad (7)$$

provided we can take

$$a_i = \frac{\partial F(\int \mathbf{L}_1(x) d^4x, \dots)}{\partial \int \mathbf{L}_i(x) d^4x}. \quad (8)$$

Both a_i and $\frac{\partial F(\int \mathbf{L}_1(x)d^4x, \dots)}{\partial \int \mathbf{L}_i(x)d^4x}$ independent of space and time.

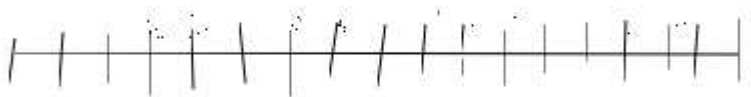
But fundamentally does $\frac{\partial F(\int \mathbf{L}_1(x)d^4x, \dots)}{\partial \int \mathbf{L}_i(x)d^4x}$ depend on what goes in in the whole Universe both in the past the present and the future.

We did not commit ourselves as to whether the action we deduced to be “practically local” was to be used classically or quantum mechanically.

We only deduced that the diffeomorphism symmetry was sufficient for deriving this “practical locality”.

Idea of locality: small spatial systems develop in time approximately independently.

Idea of locality :



Each little spatial region time-develops approximately independently.

Content of locality (quantically):

- Hamiltonian roughly sum over the contributions to the small space-pieces:

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^3x \quad (9)$$

- The degrees of freedom at different space-regions must be independent, i.e. commute.

The Locality in formulas:

At a moment of time (t -value) [with relativity a spacelike surface]

$$\text{Hamiltonian } H = \int \mathcal{H}(\phi(\vec{x}, t)) d^3\vec{x} \quad (10)$$

with $\mathcal{H}(\phi(\vec{x}, t)) =$ “hamiltonian density”

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \text{ (for } \vec{x} \neq \vec{y} \text{)}. \quad (11)$$

A priori Fermions look not local (David Fairlie):

Just replacing $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0$ by $\{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)\} = 0$ sound a priori **not** leading to locality.

If we take the hamiltonian density to always have an even number of fermion field factors, we might consider infinitesimally close products of fermion fields a kind of boson fields and use them instead of the true fermion fields. Then we could claim locality after all even with the fermions.

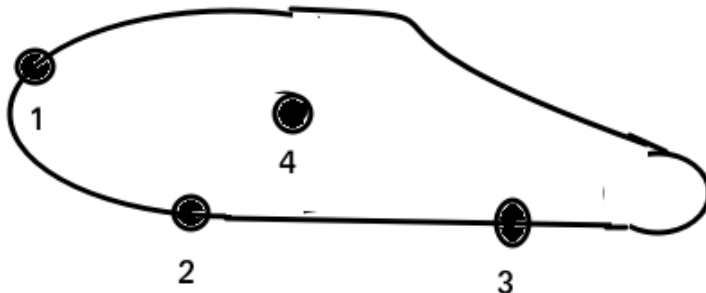
This rule of an even number of fermion factors in each term can be considered a consequence of rotational invariance under rotations by an angle 2π

Main Idea of Present Talk:

Only assuming diffeomorphism symmetry under
orientation preserving
diffeomorphisms would allow **fermions** .

The argument of Astri and mine will not fully work, if we do not have symmetry under all diffeomorphisms of the manifold, but only under the orientation preserving ones.

Specification of Orientation of Two-dimensional Manifold



Orientation specifying figure for a manifold $d=2$

How to specify orientation in d dimensions?

You need to specify an orientation:

- An ordered set of $d + 2$ points on the manifold.
- A $d - 1$ dimensional closed surface passing through $d + 1$ of the points.
- Imbedded in the latter a $d - 2$ dimensional closed surface passing through d of the points already mentioned as being on the $d - 1$ dimensional surface.
- Continuing with surfaces of lower and lower dimensions, down to one-dimensional curve.

The idea should be that such a combination of surfaces through some of the ordered set of $d + 2$ points would not be able to go into itself by an anti-orientable diffeomorphism.

Intuition behind our derivation of locality:

Modulo diffeomorphisms, apart from some points being infinitesimally close, all **points are indistinguishable**. So a diffeomorphism invariant integral must be constructed from **integrals over the whole manifold** of (products of) groups of infinitesimally cloth points.

The integrals from which to construct the invariant expression (the action) should be of course themselves diffeomorphism invariant.

But if we only have diffeomorphism invariance under orientation preserving diffeomorphisms, then some construction cannot be brought into each other.

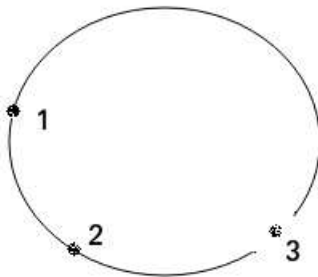
By “constructions” we here think about ordered sets of $d + 2$ points with an associated system of surfaces as we talked about earlier to specify an orientation.

Such a construction - an ordered set of $d + 2$ points - can now have **two different orientations**

And they will only be related by non-orientation preserving diffeomorphisms..

The easiest example is the $d = 1$ dimensional manifold (cricle).

An ordered set $1 + 2 = 3$ points is needed to specify an orientation; and **no extra surfaces** are needed.



Some interals must appear in say action as a whole:

E.g. a product of three fields $A(x)$, $B(y)$, and $C(z)$ can except for infiitesimally close x -values only occur in the action through the integral

$$I = \int \int \int A(x)B(y)C(z)d^1xd^1yd^1z \quad (12)$$

in the full diffeomorphism case.

But in the case of **only** diffeomorphism symmetry under the **orientation preserving** diffeomorphisms,

In only orientation preserving diffeomorphism symmetry case the action could contain the contributions from the two different orientations in different ways (with say different coefficients):

$$I_{\text{orientation } xyz \text{ pos.}} = \int_{\text{orientation } xyz \text{ pos.}} A(x)B(y)C(z)d^1x d^1y d^1z$$

$$I_{\text{orientation } xyz \text{ neg.}} = \int_{\text{orientation } xyz \text{ neg.}} A(x)B(y)C(z)d^1x d^1y d^1z.$$

You can use symmetric and antisymmetric combinations of the integrals

And for the antisymmetrized combination it would be natural to use the order of the factors $A(x)$, $B(y)$, and $C(z)$ to specify the orientation taken with plus-sign.

Thus a formal **anticommutation** would appear!

Resume: Old: diffeomorphism symmetry $\Rightarrow$ locality. New: Only orientation preserving diffeomorphisms $\Rightarrow$ locality with fermions.

- Assuming invariance (of the action) under both orientation preserving and orientation inverting diffeomorphisms we showed several years ago, that one gets **practically** locality, (Thinking of as a function of ordinary (commuting) fields $\phi(x)$.)
- In today's work: Assuming only symmetry of the action under the orientation preserving diffeomorphisms, we need to introduce products of fields defined on an ordered set of points specifying an orientation. Contributions antisymmetric in the orientation may be written in a way looking formally anticommuting.

What we think of as “locality”.

By “**locality**” we here think of the action being of the form of a space time intergal

$$“Action”[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), \dots) d^4x. \quad (13)$$

Only did dimension $d = 1$:

We only fully understand the fermions comming in in the $d = 1$ dimensional case, because we in this case do not need any surfaces to help the ordered set of $d + 2$ points to specify an orientation.

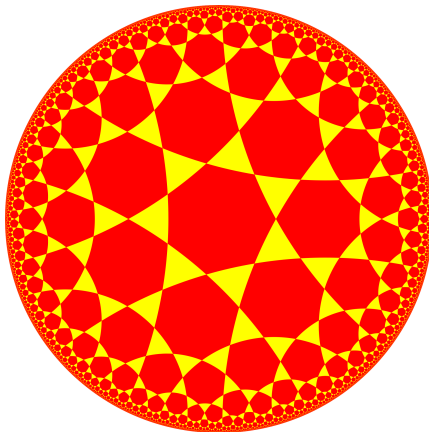
Random Dynamics Spirit

Hope that almost any speculative model should give the right theory in the limits in which we see it.

Good excuse for e.g. a graph model:

we do not have to believe really that universe was a graph but just hope that our model does not matter so much, so also a graph would be o.k..

A figure that could be interpreted as a graph. Lobachevski plane.



Astri Astri Kleppe, “A tight packing problem” # 5 A. Kleppe
(Jul, 2002) Published in: Bled Workshops Phys 3 (2002) 4,
52-70 • Contribution to: International Workshop on What
Comes Beyond the Standard Model?

Vi skal også forklare selve geometrien; hvad er rummet? og tiden?

Geometrien

Hvorfor har vi netop den Euklidiske geometri, eller rettere Einsteins Riemann geoemtri ? (Vi arbejder på det.)

- **Projektiv geoemtri** Vi tynder ud i begreberne i den Euklidiske geoemtri, som I kender bedst.
- **Felter $g^{\mu\nu}$ giver så afstande** Efter Einsteins almene relativitetsteori er den Euklidiske geometri ikke helt rigtig. End ikke den projektive.
- **Lave goemetri** Hvordan skulle “man” (Gud og Ærkeenglene) bare have fundet på den projektive geometri?

Ideen at smide nogle af geometriens begreber væk

Vi har i geometrien:

- punkter, linier, planer, ... kan skære hinanden eller ej.
- Afstande
- vinkler

I projektiv geometri holder man kun punkter, linier, planer, ... og så laver man et lille trik med "linier og planer i det uendelige."

Flere Symmetrier, når man smider afstandsbegrebet væk



Euklidisk linies symmetri: Skub alle punkter det samme stykke vej i samme retning langs linien.

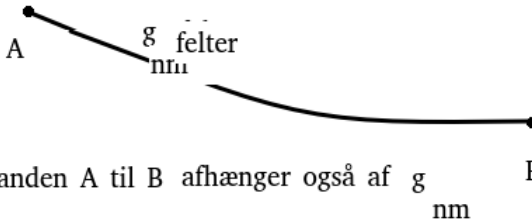


Projektiv geometri symmetri også: Kontraktion, der formindsker alle intervaller med samme faktor.

Den projektive linie har endda endnu flere symmetrier foruden de her nævnte.

I Almen Relativitetsteori er afstande afhængig af et sæt af felter g_{nm}

I ALMEN RELATIVITETS Teori



Projektiv geoemtri, en linie



Almindelig Euklidisk linie fortsætter uendeligt til begge sider.

Den projektive linie er udstyret med et enkelt ekstra punkt ved uendelig så man kan gå ud til plus uendelig og komme tilbage via minus uendelig.

Topologisk er den projektive linie altså en cirkel:



Det uendelige punkt

Tilfældig dynamik: Ærkeenglene og Gud legermed byggeklodser (historie af: Astri Kleppe)

Det var langt tilbage, før tiden, før det hele, at Ærkeenglene og Gud endag besluttede at lege med et nyt legetøj.

Det var en meget simpelt anordning med det formål at skabe sjove mønstre ved at forbinde klatter til hinanden.

Gud elskede numre havde indtil nu brugt klatterne til at skabe nye tal. Ud fra et givent nummer oprettede han et nyt ved at tilføje 1.

En af Ærkeenglene var især glade for tallene og organiserede dem på

forskellige måder. Det var sådan, at han opdagede, at hvis du tager tre par, får du få samme mængde klatter, som når du tager to gange tre.

Historien af Astri Kleppe fortsat

Den anden Ærkeengle engagerede sig i legen, og hurtigt havde de organiseret tallene i lige og ulige tal, og muntrede sig med at finde ud af, hvordan man organiserede hvert nummer i sæt af to, eller tre, eller fire eller fem, og så videre; det var sådan, de indså, at nogle af numrene ikke ønskede at blive organiseret på den måde. Gud blev meget opstemt. "Jeg kan virkelig godt lide det her," sagde han, "de her tal er på en måde primære, jeg tror, jeg vil kalde dem primtal".

En meget fræk, lille Ærkeengel kom en dag til med tråde, som han fastgjort til klatterne. "På denne måde kan vi binde dem sammen," forklarede hun.

Alle satte straks tråde til deres klatter, og skabte et enormt rod. Gud måtte gribe ind.

"Nej, nej, nej," sagde han, "lad os gå tilbage til trin et: Lad os tage en klat," han tog en nøgen klat og holdt den op foran Ærkeenglene, der stirrede på det med blanke øjne: "Nu sætter vi kun en tråd til den," fortsatte han og holdt sin op klat med den dinglede tråd.

"Jeg vil have jer til at holde styr på, hvad I gør," forklarede han, "fordi ellers vil vi ikke være i stand til at spore vores skridt tilbage. Nu beder jeg jer alle om at bygge jeres mønstre på denne måde, trin for trin, og så kan vi sammenligne, hvilke metoder der er de bedste, i den forstand at de skaber de flotteste mønstre."

Alle fik meget travlt.

En af Ærkeenglene ønskede et system, hvor hver klat havde et lige antal tråde knyttet til sig, og en anden ærkeengel foretrak én indledende klat med én indledende tråd, der blev fæstnet til en ny klat, hvortil der var knyttet tre tråde osv.

To Ærkeengle begyndte at samarbejde om at sammensætte loops med syv klatter i hver, andre eksperimenterede med forskellige lukkede loops.

Så! En tidlig morgen var der sket noget: et af mønstrene så ud til at løbe løbsk: nye tråde begyndte at knytte sig til klatter, og nye tråde og nye klatter dukkede op fra ingenting, mønsteret blev bare ved med at vokse.

Da Gud blev alarmeret, nikkede han og sagde: "Dette er netop, hvad jeg forventet. Jeg har opdaget, at der ingen ende er på antallet af tal, haha, og jeg tror det samme gælder for disse mønstre. Jeg vil kalde dem grafer, fordi de er ligesom tegninger, og nu, mine venner, tegner vi en uendelig verden. Da det i sin mangfoldighed skaber én helhed, vil jeg kalde det for universet."

Om eftermiddagen kom de alle sammen for at få kaffe (og te) i Guds store, hyggelige bibliotek, og diskuterede de seneste begivenheder. Gud så meget tilfreds ud.

Han tog sine briller af, og mens han fraværende pudsede dem, nikkede han til sine ærkeengle og sagde: "Så nu ved vi, hvordan man skaber et univers ved at kombinere de rigtige grafer. Uriel, det var dig, der startede dette, vil du venligst fortælle os, hvordan det skete?"

Uriel rødmede og stirrede på sin kop.

Så mumlede han: "Ja, det var mig der startede det, men jeg lavede så mange forskellige mønstre, at jeg ikke aner hvilket af dem, der stak af på denne måde. Det beklager jeg."

Gud rystede på hovedet.

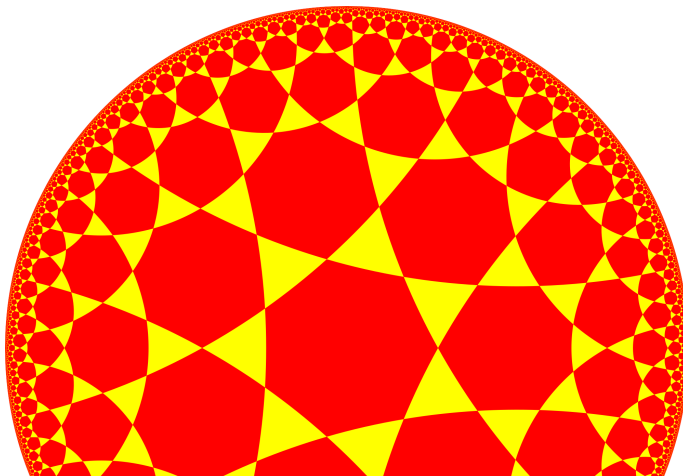
"Jeg sagde, at du skulle holde styr på, hvad du lavede," sagde han,
"nå, jeg tror vi er nødt til at lade dig lege en gang til og love mig
at være mere organiseret denne gang."
Slutning af Astri Kleppe's historie.

“Tilfældig Dynamik” (min kæledække-teori): Leg tilfældigt med regler for bygning med byggeklodser f. eks.

F.eks. nu sætter jeg regulære syvkanter sammen med trekanter så de mødes med fire hjørner -to trekanter og to syvkanter -,ja så laver vi hele figuren på den måde.



En Figur med symmetri som en vis graf med 7-kanter og link som mødes i hvert vertex



Om Figuren med de Uendelig mange trekanter og syvkanter

Bemærk:

- Figuren er uendelig i den forstand at der er uendelig mange både trekanter og syvkanter.
Faktisk er der kun tælleligt mange af dem. (Man kan angive en måde at tælle dem på en snedig spiral, uden at tælling nogensinde ville blive gennemført.)
- Man kan hoppe fra f.eks. trekant til trekant og gå ud mod kanten på også uendeligt mange måder. Vi kan definere grænsepunkter for sådanne ture ud mod grænsen (altså cirklen omkring figuren).
Men antallet af disse grænsepunkter er ikke engang et tælleligt antal.

Forsat egenskaber af figuren af trekanter og syvkanter

- Figuren har i det mindste approximativt symmetri både af typen, der drejer cirklen rundt og af typer, der kontraherer cirklen nogle steder og udvider den andre steder. Der er faktisk approksimativt en Møbius gruppe af symmetrier.

Main point: Byggeklods konstruktioner efter simple regler kan give f. eks. den projektive geometri (for en linie i eksemplet)

Den ret simple regel om at bygge trekanter og syvkanter giver en figur, med en rand, der faktisk er en cirkel, med symmetrier, der også involverer, hvad der lokalt er enskaling i størrelse.

Faktisk kan randen identificeres med den projektive linie(en linie i projektiv geometri)

Så “man” kan næsten tilfældig lave en konstruktion, der som rand, har den geometri, som med nogle ekstra felter(metrikken $g_{\mu\nu}$) kan blive til den teori vi finder i fysikken.

En Graf med samme symmetri som figuren med trekanter og syvkanter

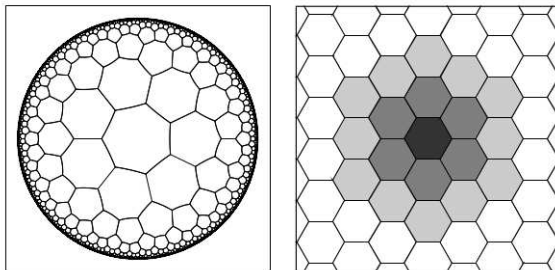


Figure 1: (a) Left: A non-Euclidean tiling of the disk by 'regular' heptagons. (b) Right: A Euclidean tiling of the plane by regular hexagons.